Heisenberg 強磁性体に関する厳密な諸定理

東大教養図学教室　　浅　野　太　郎

（４月１５日受理）

§１　序

ｎケの spin からなる異方的な Heisenberg 強磁性体に関して二つの定理を証明した。一つは分配関数の複素 fugacity 面に於ける零点が全て単位円にあるという Lee−Yang の定理[1]が，Heisenberg 強磁性体でも成立するという事であり，他の一つは，spin 相関関数について

$$\langle \sigma_1^z \sigma_2^z \cdots \sigma_m^z \rangle \geq 0 \quad (m = 1, 2, \cdots n) \tag{1.1}$$

が成立する事を外部磁場がない場合について示した事である。この相関関数に関する不等式は Ising model では，Griffiths，Kelly，[2] Sherman の第一不等式と呼ばれており，これが Lee−Yang lemma から導かれる事は著者がすでに証明しており Progress に掲載が決定している。[3] ここに述べる証明は著者の前の idea を自然に拡張してえられた。次の自明な恒等式が，証明の出発点である。

$$\begin{cases} z\dfrac{\partial}{\partial z} z = z \\[2ex] z\dfrac{\partial}{\partial z} 1 = 0 \\[2ex] z\dfrac{\partial}{\partial z} z^{-1} = -z^{-1} \end{cases} \tag{1.2}$$

（1.1）の証明で著者は（1.2）の上下の二つを用いた事は，著者の前報[3]を Preprint でごらんになつた方はすぐ御納得がいくだろう。今度の証明は，更に真中の恒等式をも利用する。

我々の問題では，次の様な量を計算する事が多い。

$$\sum_{\{\sigma\}}\sum_{\{\sigma'\}}\sum_{\{\sigma''\}} z_1^{\sigma_1}\cdots z_n^{\sigma_n}\langle\sigma_1\cdots\sigma_n|A|\sigma_1'\cdots\sigma_n'\rangle \times\langle\sigma_1'\cdots\sigma_n'|B|\sigma_1''\cdots\sigma_n''\rangle\zeta_1^{\sigma_1''}\cdots\zeta_n^{\sigma_n''} \tag{1.3}$$

ここに σ_i は±1なる値をとる。(1.3) を見ると $z_1^{\sigma_1}\cdots z_n^{\sigma_n}$ の $(\sigma_1\cdots\sigma_n)$ は，state $|\sigma_1\cdots\sigma_n\rangle$ を indicate している事がわかる。これをはつきりさせる為に

$$f=\sum_{\{\sigma\}}\sum_{\{\sigma'\}} z_1^{\sigma_1}\cdots z_n^{\sigma_n}\langle\sigma_1\cdots\sigma_n|A|\sigma_1'\cdots\sigma_n'\rangle u_1^{\sigma_1'}\cdots u_n^{\sigma_n'} \tag{1.4}$$

を考えてみると，$\langle\sigma_1\cdots\sigma_n|$ 及び $|\sigma_1'\cdots\sigma_n'\rangle$ は，各々 $\{z\}$ 及び $\{u\}$ の示数として indicate されている。行列 A，B の積を求める時には，

$$\sum_{\{\sigma'\}} A|\sigma_1'\cdots\sigma_n'\rangle\langle\sigma_1'\cdots\sigma_n'|B \tag{1.5}$$

という計算を行なう。そして一般に行列の多くの積 ABC … D といつたものを計算するのはあまり楽ではない。むしろ A だけで定る量 F(A) 等により F(A) F(B) … F(D) という計算の方が簡単である。行列の掛算は要するに間に表われる $|\sigma_1'\cdots\sigma_n'\rangle$ と $\langle\sigma_1'\cdots\sigma_n'|$ を一致させるという事である。そこで，

$$g=\sum_{\{\sigma\}}\sum_{\{\sigma'\}} v_1^{\sigma_1}\cdots v_n^{\sigma_n}\langle\sigma_1\cdots\sigma_n|B|\sigma_1'\cdots\sigma_n'\rangle\zeta_1^{\sigma_1'}\cdots\zeta_n^{\sigma_n'} \tag{1.6}$$

を考えて，積 fg を作つてみる。そして間に表われる v や u を全て 1 としてみれば，これは，(1.3) に含まれる項を全て含んでいる。しかし，これは含みすぎであつて

$$A|\sigma_1\cdots\sigma_n\rangle\langle\sigma_1'\cdots\sigma_n'|B \qquad \sigma_i\neq\sigma_i' \tag{1.7}$$

という項をも含んでいて，行列の掛算になつていない。我々はそこで (1.2) を利用して余分な項を落し fg から (1.3) を作る事を考える。fg に於いて $A|\sigma_1\cdots\rangle\langle\sigma_1'\cdots|B$，という項は $u_1^{\sigma_1}v_1^{\sigma_1'}$ という項の係数である。そこで，g に於いて $v_1=\sqrt{u_1}$，f に於いて u_1 を $\sqrt{u_1}$ とすると，これは，

$u_1^{\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{2}}$ の係数である。$(\sigma_1+\sigma_1')/2$ は ± 1 と 0 という値をとり，落すべきは $\sigma_1+\sigma_1'=0$ の項であり，これは (1.2) の真中の式を利用して全体を u_1 で微分すれば消える。

essential な点はこれにつきるのだが，形式をととのえる為に，次の様な operator を定義する。

$$D'(z_i, z_j)\, f(z_1 \cdots, z_i \cdots, z_j \cdots, z_n)$$

$$= z_i \frac{\partial}{\partial z_i} f(z_1 \cdots, \sqrt{z_i} \cdots, \sqrt{z_i} \cdots, z_n) \tag{1.8}$$

$$I_j\, f(z_1, \cdots, z_j \cdots, z_n) = -i\, f(z_1, \cdots, iz_j, \cdots z_n) \tag{1.9}$$

$$D(z_i, z_j) = I_i\, D'(z_i, z_j) \tag{1.10}$$

こうすると，

$$\begin{aligned} D(z_i, z_j)\, z_i^{\sigma} z_j^{\sigma'} &= 0 \qquad (\sigma \neq \sigma') \\ &= z_i^{\sigma} \qquad (\sigma = \sigma') \end{aligned} \tag{1.11}$$

となる事はすぐ分かる。

D を使えば，(1.4) (1.6) で定義される f，g から (1.3) を作る事はたやすい。実際，

$$D(u_1, v_1)\,(fg)$$

で考えて，{u} {v} を全て 1 にとれば，$A|\sigma_1 \cdots\rangle\langle\sigma_1 \cdots|B$，の様に一番目について丈はそろつている。そこで次の量を考えると，

$$\prod_{i=1}^{n} D(u_i, v_i)\,[fg]$$

$$= \sum_{\{\sigma\}} \sum_{\{\sigma'\}} \sum_{\{\sigma''\}} z_1^{\sigma_1} \cdots z_n^{\sigma_n} \langle\sigma_1 \cdots \sigma_n|A|\sigma_1' \cdots \sigma_n'\rangle u_1^{\sigma_1'} \cdots u_n^{\sigma_n'}$$

$$\times \langle\sigma_1' \cdots \sigma_n'|B|\sigma_1'' \cdots \sigma_n''\rangle \zeta_1^{\sigma_1''} \cdots \zeta_n^{\sigma_n''} \tag{1.12}$$

が得られ，$u_i=1$ にとれば，これは（1.3）に一致する。

この証明では essential な idea が三つあるのだが，以上はその第一である。

次の期待値を考えよう。

$$\mathrm{Tr}(z_1^{\sigma_1^z}\cdots z_n^{\sigma_n^z}A) \tag{1.13}$$

これは，$\{|\sigma_1\cdots\sigma_n>\}$ が完全系である事により

$$\sum_{\{\sigma\}} z_1^{\sigma_1}\cdots z_n^{\sigma_n} <\sigma_1\cdots\sigma_n|A|\sigma_1\cdots\sigma_n> \tag{1.14}$$

とかける。前節で述べた計算法の使える（1.4）とこれを比べてみよう。主なちがいは，A の両側の $\{\sigma\}$ が揃つている事で，いわばこれは，裾が閉じた形である。（1.4）は A の両側で別々に $\{\sigma\}$，$\{\sigma'\}$ に関して和をとつている，いわば裾開きの形である。今後の計算では，

$$\mathrm{Tr}(z_1^{\sigma_1^z}\cdots z_n^{\sigma_n^z}ABC\cdots D)$$

という形を求めねばならないので，（1.14）の形はこれを裾開きの形に直しておいた方が良い。そこで又，前節の方法を利用する。（1.14）の代りに，

$$\sum_{\{\sigma\}}\sum_{\{\sigma'\}} z_1^{\sigma_1}\cdots z_n^{\sigma_n} <\sigma_1\cdots\sigma_n|A|\sigma_1'\cdots\sigma_n'>\zeta_1^{\sigma_1'}\cdots\zeta_n^{\sigma_n'} \tag{1.15}$$

を考えて，これに $\prod_{i=1}^{n} D(z_i,\zeta_i)$ をほどこせば，$\sigma_i\neq\sigma_i'$ の項は落ちて，（1.14）が得られる。

我々は，定理を（1.15）の形の関数に関してまず証明しておいて，次に $\Pi D(z,\zeta)$ をほどこしても，やはり定理が成立する事を示すという二段がまえの方法をとる。

この論文はすでに J.Phys. Soc. Japan に投稿された著者の論文の解説の為に書かれたもので，記述がやや冗長になつている事をあらかじめお断りしておく。

§2 基本式

n ケの spin を含む spin $\frac{1}{2}$ の異方的強磁性 Heisenberg model を考える。Hamiltonian は

$$H = -\sum_{i>j} J_{ij} H_{ij} , \tag{2.1}$$

$$H_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_i^z \sigma_j^z - 1) + \frac{1}{2} r_{ij}(\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y), \tag{2.2}$$

ここに

$$J_{ij} > 0 \qquad 1 > r_{ij} > -1 \tag{2.3}$$

とする。Total magnetization $M = \sum \sigma_i^z$ が保存量なので分配関数 Q は z (= exp (βh)) の関数として

$$Q(z) = \sum < \{\sigma\} | z^M \exp(-\beta h) | \{\sigma\} > \tag{2.4}$$

とかかれる。h は外部磁場である。Ising model に於ける様に,

$$\Phi(\{z\}) = \sum z_1^{\sigma_1} \cdots z_n^{\sigma_n} < \{\sigma\} | \exp(-\beta h) | \{\sigma\} > \tag{2.5}$$

を考える。Ising model では, Φ がいわゆる Lee−Yang lemma,

Lee−Yang lemma[1)] ;　$\Phi(\{z\}) \neq 0$,

$|z_1| \geq 1, \cdots, |z_k| > 1, \cdots |z_n| \geq 1.$

を充したのだつた。Heisenberg model でもこれが成立ちそうに思えるの[4)]だが未だ証明されていない。しかし, Lee−Yang の定理を証明するには, (2.5) が L Y lemma を充す事は必ずしも必要でなく, (2.5) の任意の次数の摂動展開が Lee−Yang lemma を充す事を示せば十分である。

§3 Trotter 公式[5)]

idea の第二点は, Trotter の摂動公式[5) 6)]を採用した事である。任意の有限な行列について

$$\exp(A+B)=\lim_{N\to\infty}\left[\exp(A/N)\exp(B/N)\right]^N \tag{3.1}$$

がなりたつ。(3.1) の拡張形，

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\right)=\lim_{N\to\infty}\left[\exp(A_1/N)\cdots\exp(A_m/N)\right]^N$$

が我々の基本となる。普通教科書には (3.1) の証明がのつているが (3.2) も成立つ事は簡単に分かる。Appendix 1 でこの説明をするがこれは単に教科書[6]の云いかえである。

我々は，$N^{-1}A_i=K_{ij}H_{ij}$ ($K_{ij}=\beta J_{ij}/N$) にとつて，$\exp(-\beta H)$ を (3.2) を用いて展開する。この展開を有限なNでとどめて得られる分配関数 Q_N，又 Φ の有限な展開を Φ_N とすれば，

$$Q_N=\sum\langle\{\sigma\}|z^M P^N(N)|\{\sigma\}\rangle \tag{3.3}$$

$$\Phi_N=\sum z_1^{\sigma_1}\cdots z_n^{\sigma_n}\langle\{\sigma\}|P^N(N)|\{\sigma\}\rangle \tag{3.4}$$

を定義する事が出来る。

ここに

$$P(N)=\exp(K_{nn-1}H_{nn-1})\cdots\cdots\exp(K_{12}H_{12})$$

$$K_{ij}=\beta J_{ij}/N \tag{3.5}$$

である。spin 反転に関する対称性から，

$$\Phi_N(z_1,\cdots z_n)=\Phi_N(z_1^{-1},\cdots,z_n^{-1}) \tag{3.6}$$

かなりたつ事は明きらかである。従つて，Φ_N が L Y lemma を充せば，$Q_N(z)$ の零点は全て単位円にある。$z^n Q_N$ は z の $2n$次多項式であり，その z^k の係数は $N\to\infty$の時全て，$z^n Q$ の z^k の係数に収束する。従つて多項式の根が係数の連続関数であるというよくしられた定理によつて，$Q_N(z)$ の根が全てのNに関して全て単位円上にあれば，$Q(z)$ の零点も又全て単位円上にある事になり Lee－Yang の定理が成立する。従つて我々は，(3.4) で定義

される Φ_N が LY lemma を充す事を証明すればよい。ところが §1 に述べた様に，(3.4) は，いわば裾の閉じた形である。我々は (3.4) に応じて，裾の開いた形の関数 F_N を定義しよう。

$$
\begin{aligned}
&F_N(\{z\};\{\zeta\};N') \\
&= \sum_{\{\sigma\}}\sum_{\{\sigma'\}} z_1^{\sigma_1}\cdots z_n^{\sigma_n} \langle\{\sigma\}|P^N(N')|\{\sigma'\}\rangle \zeta_1^{\sigma_1'}\cdots\zeta_n^{\sigma_n'}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

$F_N(N')$ について我々は次の定理を証明する事にしよう。

(定理 1) (以後 T1 と略記)

$F_N(\{z\},\{\zeta\};N')$ は任意の $N, N'>0$ に対して $\{z\}$, $\{\zeta\}$ の関数として LY lemma を充す。

後に述べる様に (T1) が成立すれば Φ_N も，又 LY lemma を充すのである。

後の便利の為に，次の記号を導入しておく。二つの関数 f, g が，

$$
f=\sum_{\{\sigma\}}\sum_{\{\sigma'\}} z_1^{\sigma_1}\cdots z_n^{\sigma_n} a(\sigma_1,\cdots,\sigma_n,\sigma_1'\cdots\sigma_n')\zeta_1^{\sigma_1'}\cdots\zeta_n^{\sigma_n'} \tag{3.8}
$$

$$
g=\sum_{\{\sigma\}}\sum_{\{\sigma'\}} z_1^{\sigma_1}\, z_n^{\sigma_n} b(\sigma_1,\cdots,\sigma_n,\sigma_1'\cdots\sigma_n')\zeta_1^{\sigma_1'}\cdots\zeta_n^{\sigma_n'} \tag{3.9}
$$

という形をしている時，

$$
\begin{aligned}
&(f*g)(\{z\};\{\zeta\}) \\
&=\sum\sum z_1^{\sigma_1}\cdots z_n^{\sigma_n} a(\sigma_1,\cdots,\sigma_n,\sigma_1',\cdots,\sigma_n')b(\sigma_1',\cdots,\sigma_n',\sigma_1'',\cdots,\sigma_n'') \\
&\quad\times\zeta_1^{\sigma_1''}\cdots\zeta_n^{\sigma_n''}
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

$$
(f_*^*)(\{z\})=\sum z_1^{\sigma_1}\cdots z_n^{\sigma_n} a(\sigma_1,\cdots,\sigma_n,\sigma_1,\cdots\sigma_n) \tag{3.11}
$$

とする。この記法を用いれば，

$$
\Phi_N=F_{N*}^{\;*}(N=N') \tag{3.12}
$$

とかける事がすぐ分かる。又，F_N は F_{N-1} によつて次の様に表わされる。

$$F_N(N') = F_{N-1}(N') * F_1(N') \tag{3.13}$$

この関係は，問題を数学的帰納法で証明する場合に利用される。

先に定義した operator D を用いて，$f*g$ 又は f^*_* が f，fg から作れる事は簡単に分かる。実際

$$(f*g)(\{z\},\{\zeta\}) = \prod_{i=1}^{n} D(u_i, v_i)\left[f(\{z\};\{u\}) \times g(\{v\};\{\zeta\})\right]\Big|_{u_i=1} \tag{3.14}$$

$$(f^*_*)(\{z\}) = \prod_{i=1}^{n} D(z_i, \zeta_i)\, f(\{z\};\{\zeta\}) \tag{3.15}$$

で与えられる。

Ising model では，分配関数の z の係数が，又分配関数で表わされるという再帰定理が問題を説く鍵であつた。そしてこの再帰定理は Ising model では全ての spin が保存量であるという事実の上に立つていた。今，Heisenberg model ではもはや，その様な便利な関係はない。我々はこの難点を Lee-Yang lemma を充す関数の一般的性質を調べる事で克服する。

§4 有用な諸定理

我々の扱う関数 F や Φ は，次の特徴をもつている。$z_1 \cdots z_n \zeta_1 \cdots \zeta_n F$ は，各変数 z_i（又は ζ_i）について，z_i^2 の一次の多項式で，しかも，$z_1^2 z_2^2 \cdots z_n^2 \zeta_1^2 \cdots \zeta_n^2$ の係数は零でない。我々は上の性質をもち，しかも L Y lemma を充す関数の一般的性質を調べていくのである。

（定義1） $\{z\}$ の関数 f が，次の性質をもつ時 f を強意の Lee-Yang 関数と名づけ $f \in L^s(\{z\})$ とかく。

（I） $z_1 \cdots z_n f$ は z_i の関数としては z_i^2 の一次多項式で，f の $z_1 \cdots z_n$ の係数は零でない。

（II） 全ての z_i が $|z_i| \geq 1$ なら，

$$f(\{z_i\}_{1\leq i\leq n})\neq 0$$

以後，定義１をＤ１等と略記する。この時次の定理がなりたつ。

（定理２）　$f\in L^s(\{z\})$ は次の様に表わされる。

$$f=g_i(z_i-a_i/z_i)$$
$$=g_i z_i-h_i/z_i \tag{2.1}$$

ここに，g，a，h は，$z_1\cdots\overset{i}{\vee}\cdots z_n$ の関数で，

$$g_i\in L^s(\{z_j\}_{j\neq i}) \tag{2.2}$$

$$|z_j|\geq 1\quad(j=1,2,\cdots\overset{i}{\vee}\cdots,n)$$

なら

$$|a_i|<1 \tag{2.3}$$

（証明）　f が（D1）の（I）を充す事から，f は（2.1）の様にかける。この時（2.3）は，（II）を充す為に必要である。そうでなければ，$|z_j|\geq 1$ $(j=1\cdots\overset{i}{\vee}\cdots n)$ と $|z_i|=|\sqrt{a_i}|\geq 1$ を充す $\{z\}$ によつて $f=0$ になつてしまうからである。

$g_i\in L^s$ は次の様に示される。（2.2）が成立せぬとして，

$$g(z_1^0,\cdots,z_{n-1}^0)=0 \tag{2.4}$$

$$|z_i^0|\geq 1\qquad(i=1,\cdots,n-1) \tag{2.5}$$

を充す $\{z\}$ の組があるとしよう。この時，

$$h(z_1^0,\cdots,z_n^0)\neq 0 \tag{2.6}$$

はあきらかである。もし，$\{z^0\}$ で g も h も共に零になれば，f は z_n の値に関係なく零になり例えば，$z_1^0\cdots z_{n-1}^0$，$z_n=2>1$ で $f=0$ になるから（II）に反する。そこで，$\{z'\}$ の組を $|z_i'|\geq 1$ を充しながら $\{z_i^0\}$ から少

しづらしてやれば，$g(\{z'\})$ は零ではないが，いくらでも零に近い値をとるだろう。一方 $h(\{z_i^0\})$ は零ではないのだから，$\{z'\}$ を $\{z_i^0\}$ の十分近くにとれば $|h/g|>1$ に出来る。従つてこの場合は，

$$|z_1'|\geq 1 \quad \cdots \quad |z_{n-1}'|\geq 1,\ |z_n'|=\sqrt{|h/g|}>1$$

なる $\{z\}$ で f を零に出来るのでやはり（Ⅱ）に反する。数学的なていさいをととのえるには次の様に云えばよい。

(2.4)（2.5）を充す $\{z\}$ の組があつたとしよう。この時 Appendix 2 に示す様に，次の様な連続な路 $\{z_i(t)\}$ が存在する。

$$\begin{cases} z_i(0)=z_i^0, \quad |z_i(t)|\geq 1,\ (1\geq t\geq 0), \\ g(\{z_i(t)\})\neq 0 \quad (i=1,\cdots,n-1)\ (1\geq t>0), \\ \lim\limits_{t\to 0} g(\{z_i(t)\})=0 \end{cases} \tag{2.7}$$

$h(\{z_i^0\})\neq 0$ だから

$$\lim_{t\to 0} h(\{z_i(t)\})/g(\{z_i(t)\})=\infty \tag{2.8}$$

従つて t が十分 0 に近ければ，次の様な $\{z\}$ の組がある。

$$|z_1'(t)|\geq 1 \quad \cdots \quad |z_{n-1}'(t)|\geq 1,\ |h(\{z_i'(t)\})/g(\{z_i'(t)\})|>1$$

$f(z_1\cdots z_{n-1},z_n)=0$ を z_n について解けば，

$$z_n=\pm\sqrt{h/g} \tag{2.9}$$

となるから，

$|z_1'|\geq 1 \ \cdots\ |z_{n-1}'|\geq 1 \quad |z_n'|>1$ で，$f=0$ になる様な $\{z\}$ の組がある事になり（Ⅱ）に反する。

強意の Lee−Yang 関数を上記の様に定義しておいて，我々はこれを用いて Lee−Yang 関数を次の様に導入する。

（定義2）　(D1) の（Ⅰ）を充す $\{z\}$ の関数 f が次の性質をもつ時 f を Lee

—Yang 関数と呼び $f \in L(\{z\})$ とかく。fは任意の z_i の関数として，

$$f = A_i (z_i - a_i / z_i) \tag{2.9}$$

$$A_i \in L^s(\{z_j\}_{j \neq i}) \tag{2.10}$$

全ての z_j が $|z_j| \geq 1$ $(j \neq i)$ なら，

$$|a_i| \leq 1 \tag{2.11}$$

(D2) を充す関数が L Y lemma を充す事は明きらかである。実際，$|z_k| > 1$，$|z_j| \geq 1$ $(j \neq k, i)$ なる $\{z\}$ では $f \neq 0$ である事は，z_k に関してfを (2.9) の形に書いてみればすぐわかる。

その上，我々は次の定理をもつている。

(定理3)　(D1) の (I) を充す $\{z\}$ の関数fが L Y lemma を充すならfは (D2) の形をもつ。

(T3) の証明は，(T2) の証明と同様である。ただ (D2) で g_i となつている所を A_i で置きかえる事と，(T2) の (2.3) が (2.11) になつている為に必要なわずかの修正を行ないさえすればよい。

これから直ちに次の定理が導かれる。

(定理4)　$f \in L(\{z\})$ とする。fの $z_i z_j$ の係数は $L^s(\{z_k\}_{k \neq i, j})$ に属する。

fの z_i の係数は A_i でこれは L^s に属し，A_i に於ける z_j の係数は (T2) によつて，やはり L^s に属するからである。

次の定理は，与えられた関数fがLに属する事を証明する上で便利である。$f \in L$ を証明する為には，1からn迄の凡ゆる z_i についてfが (D2) の様に書ける事を示さねばならない。これを勝手な一変数，例えば z_1 についてだけ調べて，$f \in L$ を結論する事が出来る様にするのが次の定理である。

(定理5)　$f \in L(\{z\})$ である為の必要十分な条件は，fが (D1) の (I) を充しかつ又，ある一変数，例えば z_1 の関数として次の様に書ける事である。

$$f = A(z_1 - a/z_1) \tag{2.12}$$

$$A \in L^s(\{z_i\}_{i \neq 1}) \tag{2.13}$$

全ての $z_i (i \neq 1)$ が $|z_i| \geq 1$ なら

$$|a| \leq 1 \tag{2.14}$$

全ての $z_i (i \neq 1)$ が，$|z_i| \geq 1$ で，少くとも一つの $z_k (k \neq 1)$ が $|z_k| > 1$ なら，

$$|a| < 1 \tag{2.15}$$

（証明）　$f \in L$ なら，f は z_1 の関数として（2.12）（2.13）（2.14）を充す。仮に $|z_i| \geq 1$，$(i \geq 2)$ $|z_k| > 1$ の時　$|a| \geq 1$ とすると，$|z_1| = |\sqrt{a}| \geq 1$，$|z_2| \geq 1$，…，$|z_k| > 1$，… $|z_n| \geq 1$ という $\{z\}$ の組で f が零となるので（2.15）が必要である。

次に f が（D1）の（I）を充すとしよう。この時（T3）によれば，f が LY lemma を充すなら，$f \in L$ である。従つて，（2.13）～（2.15）を充す f が LY lemma を充している事を示せば十分であるが，（2.13）～（2.15）が成立していれば f が LY lemma を充している事は明きらかである。

全ての変数について調べる代りに（2.15）をおぎなつておけば，ただ一変数について調べるだけで $f \in L$ か否かが分かるのである。

以上の準備をしておいて，いよいよ目的の補助定理を導入する。この定理が帰納法での差本定理となり，これが第三の idea である。

（定理6）　$f \in L(\{z\})$ とする。この時

$$D(z_1, z_2) f \in L(z_1, z_3, \cdots z_n) \tag{2.16}$$

（証明）　f は，z_1，z_2 の関数として次の様に書ける。

$$f = B(z_1 z_2 + a z_1 z_2^{-1} + b z_1^{-1} z_2 + c z_1^{-1} z_2^{-1}) \tag{2.17}$$

ここで，(T4) より

$$B \in L^{s}(z_3, \cdots, z_n) \tag{2.18}$$

が分かる。

Dの定義から，(1.11) を用いて

$$D(z_1, z_2)\ f = B(z_1 + c/z_1) \tag{2.19}$$

ここで (T5) を用いれば，$Df \in L$ を示すにはただ，$|z_3| \geq 1 \cdots, |z_n| \geq 1$ の時に，

$$|c| \leq 1 \tag{2.20}$$

及び，$|z_3| > 1$，$|z_4| \geq 1 \cdots |z_n| \geq 1$ の時，

$$|c| < 1 \tag{2.21}$$

を示せば良い。(2.17) で，$z_1 = z_2 = \sqrt{z}$ とおいて，次の方程式を考えよう。

$$z + a + b + c/z = 0 \tag{2.22}$$

まず (2.20) を示す。仮に $|c| > 1$ としよう。(2.22) の二根の積は c だから，この場合少くとも一つの根 α が $|\alpha| > 1$ である。

そこで，$z_1 = z_2 = \sqrt{\alpha}$ とすると，

$$|z_1| = |z_2| = |\sqrt{\alpha}| > 1, \quad |z_3| \geq 1, \cdots |z_n| \geq 1$$

なる $\{z\}$ で $f = 0$ になるので $f \in L$ でなくなつてしまう。よつて $|c| \leq 1$ である。次に (2.21) を示す。$|z_3| > 1$ で，その他は全く ≥ 1 ならば，(2.22) の根は二つ共絶対値が 1 より小でなければならない。そうでなければ，

$$|z_1| = |z_2| = |\sqrt{z}| \geq 1, \quad |z_3| > 1, \cdots \quad |z_n| \geq 1$$

という $\{z\}$ で $f = 0$ となり $f \notin L$ となるからである。

c は (2.22) の二根の積だから，二根が共に絶体値に於いて 1 より小であるなら $|c| < 1$ である。よつて (2.21) も示された。

次に我々は，二つの Lee－Yang 関数を D で結びつけて新しい Lee－Yang

関数を作る事を考えよう。

（定理7）　$f\in L(\{z\})$，$g\in L(\{\zeta\})$ とする。この時，

$$D(z_1,\zeta_1)(fg)\in L(z_1,\cdots,z_n,\zeta_2,\cdots\zeta_m) \tag{2.23}$$

（証明）　f，g は z_1，ζ_1 の関数として次の様に書ける。

$$f=A(z_1-a/z_1) \tag{2.24}$$

$$g=B(\zeta_1-b/\zeta_1) \tag{2.25}$$

$$A\in L^s \tag{2.26}$$

$$B\in L^s \tag{2.27}$$

$|z_2|\geqq 1\cdots|z_n|\geqq 1$，$|\zeta_2|\geqq 1\cdots|\zeta_m|\geqq 1$ なら，

$$|a|\leqq 1,\quad |b|\leqq 1 \tag{2.28}$$

及び，$|z_2|\geqq 1\cdots|z_n|\geqq 1$，$|\zeta_2|\geqq 1,\cdots,|\zeta_m|\geqq 1$ で，そのうちの少くとも一つ，例えば z_2 が $|z_2|>1$ なら，

$$|ab|<1 \tag{2.29}$$

（2.29）は（T5）及び（2.28）から得られる。

一方，

$$D(z_1,\zeta_1)(fg)=AB(z_1+ab/z_1) \tag{2.30}$$

（2.26）（2.27）から，

$$AB\in L^s(z_2\cdots z_n,\zeta_2,\cdots\zeta_m) \tag{2.31}$$

又，$|z_2|\sim|\zeta_m|$ が全て $\geqq 1$ なら，$|ab|\leqq 1$，又，その中の少くとも一つが >1 なら $|ab|<1$ なので，（T5）により

$$D(fg) \in L \tag{2.32}$$

である。

（T6）（T7）が主要定理だが，後に相関関数の正負を調べる際に用いる定理を挙げておく。これはすでに著者[3)]が前の論文で紹介した定理である。まだ公表されていないので再記しておく。

（定理8）　$f \in L(\{z\})$ なら，

$$d_i f = I_i f \in L(\{z\}) \tag{2.33}$$

f を z_i の関数として（D2）の様に表し d_i をほどこせばすぐわかる。

我々は§1で，$f*g$，f^*_* という演算を定義した。（T6）（T7）を用いて，$f*g \in L$　$f^*_* \in L$ 等が成立する事を示そう。

（定理9）　$f \in L(\{z\},\{\zeta\})$，又，f は，（1.4）の様にかけるとする。この時

$$f^*_* \in L(\{z\}) \tag{2.34}$$

（証明）　（T6）により，

$$D(z_1,\zeta_1)f(\{z\};\{\zeta\}) \in L(\{z\},\ \zeta_2\cdots\zeta_n) \tag{2.35}$$

これに $D(z_2,\zeta_2)$ を乗じ（T6）を使い，同じ方法をくり返せば，（2.34）が得られる。

（定理10）　f，g が各々（1.4）（1.6）の様にかけるとする。（但し，u，v は各々 ζ でおきかえる。）$f \in L(\{z\},\{\zeta\})$，$g \in L(\{z\},\{\zeta\})$ なら

$$f*g \in L(\{z\},\{\zeta\}) \tag{2.36}$$

（証明）

$$f(\{z\},\{u\}) \in L(\{z\},\{u\}) \tag{2.37}$$

$$g(\{v\},\{\zeta\}) \in L(\{v\},\{\zeta\}) \tag{2.38}$$

（T7）を用いて，

$$D(u_1, v_1)(fg) \in L(\{z\},\{u\},\{v_i\}_{i\geq 2},\{\zeta\}) \tag{2.39}$$

これに（T6）を用いて

$$\prod_{i=1}^{n} D(u_i, v_i)(fg) \in L(\{z\},\{u\},\{\zeta\}) \tag{2.40}$$

ここで全ての u_i を1として

$$f * g \in L(\{z\},\{\zeta\}) \tag{2.41}$$

§5　数学的帰納法

基本定理（T6）（T7）（T9）（T10）を用いて，

$$\Phi_N(\{z\}) \in L(\{z\}) \tag{5.1}$$

を示す。（3.12）の様に，

$$\Phi_N = F_N(N)\,{}^{*}_{*} \tag{5.2}$$

だから，（T9）により，$F_N(N) \in L$ を示せばよい。それには，任意の N, $N' > 0$ について，

$$F_N(\{z\};\{\zeta\};N') \in L(\{z\},\{\zeta\}) \tag{5.3}$$

を示せば十分である。$F_N(N')$ の中の N' は，J/N' として含まれている。$J>0$ なら J/N' も正だから，N' は任意の正の値に固定しておいてよい。以下，$F_N(N')$ を単に F_N とかく。

帰納法は N と n について行なわれる。

$N = m-1$ の時成立するとしよう。この時，

$$F_m = F_{m-1} * F_1 \tag{5.4}$$

が成立する事は §3 の (3.13) で述べた。従つて (T10) により，$F_1 \in L$ が成立するなら $F_m \in L$ が成立し定理が成りたつ。よつて $F_1 \in L$ を示せばよい。我々はこれを n に関する帰納法で証明する。以下 n spin 系の F_1 を f_n とかく。

n＝1 の時，

$$F_1 = z_1 \zeta_1 + z_1^{-1} \zeta_1^{-1} \tag{5.5}$$

となり，$F_1 \in L(\{z\},\{\zeta\})$ である。

実は n＝2 の時も定理が成立する事は直接計算でたしかめる事が出来る。即ち

（定理11）　次式で定義される f_2 は $L(z_1, z_2, \zeta_1, \zeta_2)$ に属する。

$$f_2 = \sum_{\{\sigma\}} \sum_{\{\sigma'\}} z_1^{\sigma_1} z_2^{\sigma_2} \langle \sigma_1 \sigma_2 | \exp(K_{12} H_{12}) | \sigma_1' \sigma_2' \rangle \times \zeta_1^{\sigma_1'} \zeta_2^{\sigma_2'} \tag{5.6}$$

証明は Appendix に述べる。

次の関数 G_n を定義しよう。

$$G_n(\{z\};\{\zeta\}) = \sum_{\{\sigma\}} \sum_{\{\sigma'\}} z_1^{\sigma_1} \, z_n^{\sigma_n} \times \langle \sigma_1 \cdots \sigma_n | \exp(K_{12}H_{12}) \exp(K_{13}H_{13}) \cdots \exp(K_{1n}H_{1n}) | \sigma_1' \cdots \sigma_n' \rangle \times \zeta_1^{\sigma_1'} \cdots \zeta_n^{\sigma_n'} \tag{5.7}$$

我々はまず G_n が $L(\{z\};\{\zeta\})$ に属する事を示す。

$$G_2(z_1, z_2; \zeta_1, \zeta_2; K_{12}) \text{ と } G_2(z_1, z_3; \zeta_1 \zeta_3; K_{13})$$

を共通に含まれる変数 $(z_1\ z_2)$ に関し D を用いて結びつける。即ち

$$D(u_1, v_1)\left[G_2(z_1, z_2; u_1, \zeta_2; K_{12}) G_2(v_1, z_3; \zeta_1, \zeta_3; K_{13})\right] \tag{5.8}$$

$$\sum_{\{\sigma\}}\sum_{\{\sigma'\}}\sum_{\{\sigma''\}} z_1^{\sigma_1} z_2^{\sigma_2} \langle \sigma_1\sigma_2\sigma_3 | \exp(K_{12}H_{12}) | \sigma_1''\sigma_2'\sigma_3 \rangle u_1^{\sigma_1''} \zeta_2^{\sigma_2'}$$
$$\times\ z_3^{\sigma_3} \langle \sigma_1''\sigma_2'\sigma_3 | \exp(K_{13}H_{13}) | \sigma_1'\sigma_2'\sigma_3' \rangle \zeta_1^{\sigma_1'} \zeta_3^{\sigma_3'} \quad (5.9)$$

ここで u_1 を 1 とおいたものは，

$$G_3(z_1, z_2, z_3; \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3; \{K_{1j}\}_{j=2,3})$$

である。

但し，H_{12}, H_{13} には各々第三番目及び第二番目の spin は入つていない事を用いた。

さて，$G_2 \in L$ である事は (T11) から分かる。従つて (T7) により $G_3 \in L$ が示される。今度は $G_3 \in L$ と $G_2(K_{14})$ を D で結びつけ，同じ議論をすれば $G_4 \in L$ がわかる。これをくり返して $G_n \in L$ がわかる。

次の量 $\widetilde{P}(1)$，$\widetilde{Q}(1)$ を定義しよう。

$$\widetilde{Q}(1) = \exp(K_{12}H_{12}) \cdots\cdots \exp(K_{1n}H_{1n}) \quad (5.10)$$

$$\widetilde{P}(1) = \exp(K_{n\,n-1}H_{n\,n-1}) \cdots\cdots \exp(K_{23}H_{23}) \quad (5.11)$$

これを用いて，

$$f_n = \sum\sum z_1^{\sigma_1} \cdots z_n^{\sigma_n} \langle \sigma_1 \cdots \sigma_n | \widetilde{P}(1)\widetilde{Q}(1) | \sigma_1' \cdots \sigma_n' \rangle$$
$$\times\ \zeta_1^{\sigma_1'} \cdots \zeta_n^{\sigma_n'} \quad (5.12)$$

$$G_n = \sum\sum z_1^{\sigma_1} \cdots z_n^{\sigma_n} \langle \sigma_1 \cdots \sigma_n | \widetilde{Q}(1) | \sigma_1' \cdots \sigma_n' \rangle$$
$$\times\ \zeta_1^{\sigma_1'} \cdots \zeta_n^{\sigma_n'} \quad (5.13)$$

又，

$$f_{n-1}(z_2, \cdots, z_n; \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$$
$$= \sum\sum z_2^{\sigma_2} \cdots z_n^{\sigma_n} \langle \sigma_2 \cdots \sigma_n | \widetilde{P}(1) | \sigma_2' \cdots \sigma_n' \rangle$$
$$\times\ \zeta_2^{\sigma_2'} \cdots \zeta_n^{\sigma_n'} \quad (5.14)$$

と表わされる。G_n と f_{n-1} を (z_2,ζ_2) から (z_n,ζ_n) に関してDで結びつけよう。

数学的帰納法で $f_n \in L$ を示す。$n=1$ の時成立する事はすでに見た。$n=m-1$ の時を仮定し $n=m$ の時を示す。次の関数を考えよう。

$$\left[\prod_{i=2}^{m} D(u_i,v_i)\right]\left[f_{m-1}(\{z_i\}_{i\geq 2};\{u_i\}_{i\geq 2}:\{K_{ij}\}_{i>j\geq 2})\right.$$
$$\left.\times\, G_m(z_1,v_2,\cdots,v_m;\{\zeta_i\}_{i\geq 1}:\{K_{1i}\}_{1\leq i\leq m})\right] \tag{5.15}$$

$f_{m-1}\in L$, $G_m \in L$ だから，(5.15) で定義される関数は (T6) (T7) の故にやはり $\in L$ である。(5.15) は次の様にかける。

$$\sum_{\{\sigma\}}\sum_{\{\sigma'\}}\sum_{\{\sigma''\}} z_2^{\sigma_2}\cdots z_m^{\sigma_m} < \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m|\widetilde{P}(1)|\sigma_1\sigma_2''\cdots\sigma_m''> u_2^{\sigma_2''}\cdots u_m^{\sigma_m''}$$
$$\times\, z_1^{\sigma_1}<\sigma_1\sigma_2''\cdots\sigma_m''|\widetilde{Q}(1)|\sigma_1'\sigma_2'\cdots\sigma_m'>\zeta_1^{\sigma_1'}\cdots\zeta_m^{\sigma_m'} \tag{5.16}$$

(5.16) で u_i を全て1に等しくすれば，これは

$$\sum\sum\sum z_1^{\sigma_1}\cdots z_m^{\sigma_m} < \{\sigma\}|\widetilde{P}(1)\widetilde{Q}(1)|\{\sigma'\}>\zeta_1^{\sigma_1'}\cdots\zeta_m^{\sigma_m'} \tag{5.17}$$

になり，これは $f_m(\{z\};\{\zeta\})$ に等しい。即ち $f_m\in L$ が得られた。これで証明は完結した。

§6 相関関数

磁場がない時，spin相関関数について

$$<\sigma_1^z\cdots\sigma_m^z>\ \geq 0 \qquad m=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{6.1}$$

を示す。§6の議論は著者の前の論文[3)]そのままである。

(3.4) で定義された Φ_N が $L(\{z\})$ に属する事はすでに見た。ところが§4の (T8) によれば，

$$z_i\frac{\partial}{\partial z_i}\Phi_N \in L(\{z\}) \tag{6.2}$$

である。一方，(D2) の様な関数は，その絶体値が，全ての z_i が $|z_i|\geq 1$

の時には各々の $|z_j|$ の単調増加関数である事が知られている。[7] z_i が全て正数なら Φ_N も実数で正である。従つて，

$$z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \Phi_N \geq 0 \qquad z_i \geq 1, \ i=1, \cdots, n \tag{6.3}$$

（6.3）の左辺は$\in$ Lであり z_i が全て ≥ 1 なら非負である。従つて

$$z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \ z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \Phi_N \geq 0 \qquad z_i \geq 1, \ i=1, \cdots, n \tag{6.4}$$

しかも（6.4）の左辺は又（T8）によつて$\in$ Lである。これをくり返して，

$$d_1 d_2 \cdots d_m \Phi_N \geq 0 \ , \quad z_i \geq 1, \ i=1, \cdots, n \tag{6.5}$$

（6.5）で全ての z_i を1に等しくすると Φ_N の定義から，

$$\sum_{\{\sigma\}} \sigma_1 \cdots \sigma_m < \sigma_1 \cdots \sigma_n | P^N(N) | \sigma_1 \cdots \sigma_n > \ \geq 0 \tag{6.6}$$

（6.6）で $N \to \infty$ とすれば，（6.1）が得られる。磁場 $h \geq 0$ がある場合は，Griffiths の ghost spin の方法[2] で扱えるが，その種の detail は次の報告にまとめられよう。

§7 討論

全ての証明は $J_{ij} > 0$，$1 > \gamma_{ij} > -1$ の場合について行なわれた。しかし，いくつかのJが零の場合，あるいは γ が ± 1 に等しい場合は連続性の為に，Lee−Yang thecrem も不等式（6.1）もやはり成立する。全ての γ が零の場合は Ising model になるが，これは我々の場合に含まれている。従つてこれ迄述べてきた証明は Ising ferromagnets に於ける対応した定理の別証になつている。

計算器実験の結果を Publish される前に御送付下さつた Kawabata, Suzuki, Ono, Karaki の諸先生に感謝する。

Appendix 1. 有限な行列 A, B で,

$$\exp A \, \exp B = \exp(A+B) + O(\|A\|\,\|B\|)$$

である事はよくしられている。[6] $A = A_1$, $B = \sum_{i=2}^{m} A_i$ にとれば,

$$\exp A_1 \exp(A_2 + \cdots + A_m) = \exp(\sum A_i) + O(\|A_1\|\,\|A_2 + \cdots + A_m\|)$$

$\exp A = O(1)$ $(\|A\| \to 0)$ だから,

$$\exp A_1 \cdots \exp A_m = \exp(\sum A_i) + \sum_{i>j} O(\|A_i\|\,\|A_j\|) \qquad (A\,1)$$

これから

$$\log[\exp A_1 \cdots \exp A_m) = A_1 + \cdots + A_m + \sum_{i>j} O(\|A_i\|\,\|A_j\|) \qquad (A\,2)$$

が導かれる。[6]

従つて (A 2) で $A \to A/N$ として,

$$[\exp(A_1/N) \cdots \exp(A_m/N)]^N = \exp(A_1 + \cdots + A_m + O(N^{-1})) \qquad (A\,3)$$

$N \to \infty$ の極限をとれば (3.2) が得られる。

Appendix 2. (2.7) を充す様な連続な道 $\{z_i(t)\}$ がある事を示す。次の定理を証明すればよい。

(定理 A 1) $\{z_i\}_{1 \leq i \leq n}$ の関数 g が (D1) の (I) を充し, $z_i = z_i^0$ $(i = 1, \cdots, n)$, $|z_i^0| \geq 1$ で零になるとする。この時連続な $\{z_i(t)\}$ があつて次の性質をもつ。

$1 \geq t > 0$ で

$$g(\{z_i(t)\}) \neq 0 \qquad (A\,4)$$

$$1 \geq t \geq 0 \quad で \quad |z_i(t)| \geq 1 \qquad (A\,5)$$

又,

$$z_i(0) = z_i^0 \qquad (i=1, \cdots, n) \tag{A6}$$

数学的帰納法で証明する。n＝1の時，

$$g(z_1) = Az_1 - B/z_1 \tag{A7}$$

とかけ（D1）の（I）の為に $A \neq 0$ である。

$g(z_1)=0$ になるのは $\pm\sqrt{B/A}$ の二点だけだから，z_1^0 を出発し，単位円の外側を動く任意の曲線 $z_1(t)$ に，出発点をのぞいて，この $\pm\sqrt{B/A}$ が上にのつていない限りは，（A4）（A5）（A6）の条件を全て充す。そこで $n=1$ の時は良い。$n=m-1$ の時定理が成立つとして $n=m$ の時を示す。gを次の様にかく。

$$g(z_1 \cdots z_m) = g'(z_1 \cdots z_{m-1})\, z_m - h'(z_1 \cdots z_{m-1})/z_m \tag{A8}$$

$g'(z_1^0, \cdots, z_{m-1}^0) \neq 0$ としよう。この時はgは $z_m = \pm\sqrt{h'(\{z^0\})/g'(\{z^0\})}$ の二点で零になる丈だから前に述べた様にこの二点だけを避けてやれば，z_m^0 を出発する連続関数 $z_m(t)$ があつて，（A4）（A5）（A6）を充す。z_m 以外の z_i は z_i^0 に固定しておけば，$\{z_i(t)\}$（$i=1, \cdots, m$）があつて（A4）（A5）（A6）を充す事になる。次に，$g'(z_1^0, \cdots, z_{m-1}^0)=0$ であるとしよう。g' は $m-1$ 変数の関数でやはり（D1）の（I）を充すから，帰納法の仮定により（A4）（A5）（A6）を充す $z_i(t)$（$i=1 \cdots m-1$）がある。$t \neq 0$ では $g=0$ になるのは，

$$z_m = \pm\left[h'(\{z_i(t)\})/g'(\{z_i(t)\})\right]^{\frac{1}{2}} \tag{A9}$$

の時だけなので（A9）で与えられる二つの曲線と交らない様に $z_m(t)$ をとれば，やはり（A4）（A5）（A6）を充す。従つてこの場合もやはり定理の条件を充す $\{z(t)\}$ がある事になる。

Appendix 3.

§5の（T11）を証明する。

（定理11）

$$f_2(z_1, z_2; \zeta_1, \zeta_2) = \sum_{\{\sigma\}} \sum_{\{\sigma'\}} z_1^{\sigma_1} z_2^{\sigma_2} \langle \sigma_1 \sigma_2 / \exp(K_{12} H_{12}) | \sigma_1' \sigma_2' \rangle \times \zeta_1^{\sigma_1'} \zeta_2^{\sigma_2'} \qquad (A10)$$

$$\in L(z_1, z_2, \zeta_1, \zeta_2)$$

Appendix 3 の証明は Ising model での L Y lemma の Lee－Yang の方法を用いる。

f_2 は次の様にかける。

$$\begin{aligned} f_2 = {} & z_1 z_2 \zeta_1 \zeta_2 + z_1^{-1} z_2^{-1} \zeta_1^{-1} \zeta_2^{-1} \\ & + e^{-K} \cosh(\gamma K)(z_1 z_2^{-1} \zeta_1 \zeta_2^{-1} + z_1^{-1} z_2 \zeta_1^{-1} \zeta_2) \\ & + e^{-K} \sinh(\gamma K)(z_1 z_2^{-1} \zeta_1^{-1} \zeta_2 + z_1^{-1} z_2 \zeta_1 \zeta_2^{-1}) \end{aligned} \qquad (A11)$$

ここで，$K = K_{12} > 0 \quad \gamma = \gamma_{12}$ で $1 > \gamma > -1$ である。

この時，次の事がわかる。

（定理A2）　f_2 に於ける z_1 の係数は，$L^S(z_2, \zeta_1, \zeta_2)$ に属する。

実際（A11）から z_1 の係数は，

$$z_2 \zeta_1 \zeta_2 \{1 + e^{-K} [\cosh(\gamma K) z_2^{-2} \zeta_2^{-2} + \sinh(\gamma K) z_2^{-2} \zeta_1^{-2}]\} \qquad (A12)$$

に等しい。従つて $|z_2| \geq 1$，$|\zeta_1| \geq 1$，$|\zeta_2| \geq 1$，又 $K > 0$，$1 > \gamma > -1$ の時には，{ } の第二項の絶体値は，$e^{-K}(\cosh(\gamma K) + \sinh(\gamma K)) < 1$ $(\gamma \geq 0)$，$e^{-K}(\cosh(\gamma K) - \sinh(\gamma K)) < 1$ $(\gamma \leq 0)$ の何れかでおさえられるので，γ の正負にかかわらず1をこえない。従つて（A12）は零にならないのである。

明きらかに（TA2）は他の変数についても云える。そこで，（T2）により f_2 に於ける $z_1 z_2$，$\zeta_1 \zeta_2$，$z_i \zeta_j$ の係数は全て L^S に属する事になる。これを定理A3．と名付ける。

（定理A3）　f_2 に於ける $z_i z_j$, $\zeta_i \zeta_j$, $z_i \zeta_j$ の係数は全て L^S に属する。

仮に（T11）がなりたたぬとする。この時は次の様な $\{z, \zeta\}$ の組がある。

$$f_2(z_1, z_2; \zeta_1, \zeta_2) = 0 \tag{A13}$$

$$|z_1| > 1, \ |z_2| \geq 1, \ |\zeta_1| \geq 1, \ |\zeta_2| \geq 1 \tag{A14}$$

f_2 を次の形にかく。

$$f_2 = q(z_1, \zeta_1, \zeta_2)\, z_2 + q'(z_1, \zeta_1, \zeta_2)/z_2 \tag{A15}$$

又，

$$f_2 = \left[r(\zeta_1, \zeta_2)\, z_1 + r'(\zeta_1, \zeta_2)/z_1 \right] z_2$$

$$+ \left[s(\zeta_1, \zeta_2) z_1 + s'(\zeta_1, \zeta_2)/z_1 \right] / z_2 \tag{A16}$$

（TA3）より，$|\zeta_1| \geq 1$, $|\zeta_2| \geq 1$ なら $r \neq 0$，又（TA2）より $|z_1| \geq 1$, $|\zeta_1| \geq 1$, $|\zeta_2| \geq 1$ なら，$q \neq 0$ である。

$\{\zeta\}$ を始めの値に固定しておいて，z_2 を z_1 の関数と見る。

$f_2 = 0$ を充す z_2 は，$q \neq 0$ なので z_1 と共に連続的に動き，$r \neq 0$ なので $z_1 \to \infty$ で有限な極限値 $\mathfrak{z}_2$ に達する。$\mathfrak{z}_2$ は，次式を充す事は容易にたしかめられる。

$$q''(\mathfrak{z}_2, \zeta_1, \zeta_2) = 0 \tag{A17}$$

q'' は，f_2 に於ける z_1 の係数である。$q'' \in L^S$ なので，$|\zeta_1| \geq 1$, $|\zeta_2| \geq 1$ から $|\mathfrak{z}_2| < 1$ である。従つて途中どこかで $|z_2| = 1$ となる z_1 の値 z_1' がある。従つて

$$f_2(z_1', z_2', \zeta_1, \zeta_2) = 0 \tag{A18}$$

$$|z_1'| > 1, \ |z_2'| = 1, \quad |\zeta_1| \geq 1, \ |\zeta_2| \geq 1 \tag{A19}$$

を充す $\{z\}$ の組がある。z_2', ζ_2 を固定して ζ_1 を z_1 の関数として同じやり方をくりかえすと $|\zeta_1| = 1$ となる ζ_1' がある。結局

$$f_2(z_1'',\ z_2'',\ \zeta_1'',\ \zeta_2'') = 0 \tag{A 20}$$

$$|z_1''| > 1,\ |z_2''| = |\zeta_1''| = |\zeta_2''| = 1 \tag{A 21}$$

を充す $\{z, \zeta\}$ の組がある事になる。ところが，f_2 は $\{z, \zeta\}$ の実関数，即ち，

$$\overline{f}_2(\{z\}, \{\zeta\}) = f_2(\{\overline{z}\}, \{\overline{\zeta}\}) \tag{A 22}$$

であり，又，

$$f_2(\{z^{-1}\}, \{\zeta^{-1}\}) = f_2(\{z\}, \{\zeta\}) \tag{A 23}$$

を充すから，$|z_2| = |\zeta_1| = |\zeta_2| = 1$ ならば，$f_2 = 0$ を充す z_1 は $|z_1| = 1$ でなければならない事が分かる。従つて，(A 20) (A 21) を充す $\{z, \zeta\}$ の組はなく (T 11) が証明された。

文　　献

1) T.D.Lee and C.N.Yang, Phy. Rev., 87 (1952) 410 .

2) R.B.Griffiths, J.Math. Phys 8 (1967) 478, 484.
Commun. Math. Phys., 6 (1967) 121.
D.G.Kelly and S.Sherman, J.Math. Phys., 9 (1968) 460,
see also J.Ginibre, Phys. Rev. Letters 23 (1969) 828,
and S.Sherman, Commun. Math. Phys., 14 (1969) 1.

3) T.Asano, to be published in Prog. Theor. Phys., 43 (1970) No5.

4) M.Suzuki, Prog. Theor. Phys., 40 (1968) 1246.

5) H.F.Trotter, Proc. Am. Math. Soc., 10 (1959) 545.

6) 山内恭彦，杉浦光夫　連続群論入門 91 (1966) 培風館

7) T.Asano, Prog. Theor. Phys., 40 (1968) 1328,
J.Phys. Soc. Japan 25 (1968) 1220.
M.Suzuki, J.Math. Phys., 9 (1969) 2064.